УДК 519.21
ГРНТИ 27.43.51
DOI: 10.23947/interagro.2020.1.75-80

КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ МЕТОД ОЦЕНКИ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЖЕННОСТИ ПРИВОДОВ АКТИВНЫХ РАБОЧИХ ОРГАНОВ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ МАШИН

Вислоусова И.Н., Котов В.В., Лесняк О.Н., Матросов А.А., Котова А.А.

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

Аннотация. Рассмотрен корреляционный метод исследования динамики многомассовых систем с нелинейными характеристиками. Метод основан на непосредственном преобразовании корреляционных функций нелинейных членов уравнений малых колебаний. Метод применим для систем с неаналитическими нелинейными функциями. Рассмотренные методы позволяют исследовать динамические процессы в приводах активных рабочих органов уборочных машин.

Ключевые слова. Привод, динамическая модель, нелинейные колебания, случайный процесс, корреляционная функция, нагрузка.

CORRELATION METHOD FOR ESTIMATING DYNAMIC LOADING OF DRIVES OF ACTIVE WORKING ORGANS OF HARVEST MACHINES

Vislousova I.N., Kotov V.V., Lesnjak O.N., Matrosov A.A., Kotova A.A.

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

Abstract. The correlation method of a research of dynamics of multimass systems with nonlinear performances is considered. The method is based on immediate transformation of correlation functions of nonlinear terms of the equations of small oscillations. The method is applicable for systems with nonanalytic nonlinear functions. The considered methods allow investigate dynamic processes in drives of active working organs of harvest machines.

Keywords. Drive, dynamic model, nonlinear oscillations, random process, correlation function, load.

Большинство вероятностных методов требуют приведения нелинейных характеристик системы к аналитическим (гладким, дифференцируемым) функциям [1,2]. Корреляционный метод может быть применен непосредственно для существенно нелинейных систем (с неаналитическими нелинейными функциями) [3,4]. Метод основан на непосредственном преобразовании корреляционных функций нелинейных членов уравнений малых колебаний.

Рассмотрим колебания одномассовой динамической системы с нелинейной упругой характеристикой $f(\varphi)$, представляющей собой произвольную (неаналитическую) функцию обобщенной координаты. Силы сопротивления сведены к случаю линейного трения. Тогда дифференциальное уравнение случайных колебаний имеет вид:

$$J\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} + f(\varphi) = x(t), \tag{1}$$

где $x(t)$ - подаваемый на вход системы случайный нормальный стационарный процесс с известными математическим ожиданием $\bar{x}$, дисперсией D_x и спектральной плотностью S_x. Примеры случайных процессов в приводе колеблющегося лемеха представлены на рис. 1. Нелинейная упругая характеристика системы $f(\varphi)$ представляет собой позиционную жесткую восстанавливающую силу. Если функция $f(\varphi)$ - нечетная, то при центрированном входе ($\bar{x} = 0$) процесс $\varphi(t)$ также можно считать центрированным.

Для построения приближенного стационарного решения представим неизвестную случайную функцию $\varphi(t)$ в виде ряда по степеням нормального процесса $\varphi_0(t)$ с распределением

$$p(\varphi_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0}\; e^{-\frac{\varphi_0^2}{2\sigma_0^2}},$$ σ_0^2 – неизвестная дисперсия.

Соответствующие двумерные распределения также принимаем нормальными. Совместное распределение значений процесса $\varphi_0(t)$ в два различных момента времени имеет вид

$$p\left(\varphi_0,\varphi_0^*\right)=\frac{1}{2\pi\,\sigma_0^2\sqrt{1-r_0^2}}\quad exp\left[-\frac{1}{2\left(1-r_0^2\right)}\left(\frac{\varphi_0^2}{\sigma_{\varphi_0}^2}-\frac{2r_0\varphi_0\varphi_0^*}{\sigma_{\varphi_0}^2}+\frac{\varphi_0^{*2}}{\sigma_{\varphi_0}^2}\right)\right],$$

здесь $\varphi_0=\varphi_0(t),\qquad \varphi_0^*=\varphi_0^*(t+\tau),\qquad r_0=\dfrac{K_{\varphi_0}(\tau)}{D_{\varphi_0}}=\dfrac{M\left\{\varphi_0^*(t+\tau)\varphi_0(t)\right\}}{D_{\varphi_0}}.$

При нечетной функции $f(\varphi)$ аппроксимирующий ряд должен содержать нечетные степени:

$$\varphi(t)=a_1\varphi_0+a_3\varphi_0{}^3+a_5\varphi_0{}^5+\ldots+a_n\varphi_0{}^n=\sum_{i=0,1,..}^{\frac{n-1}{2}}a_{2i+1}\varphi_0{}^{2i+1}. \qquad (2)$$

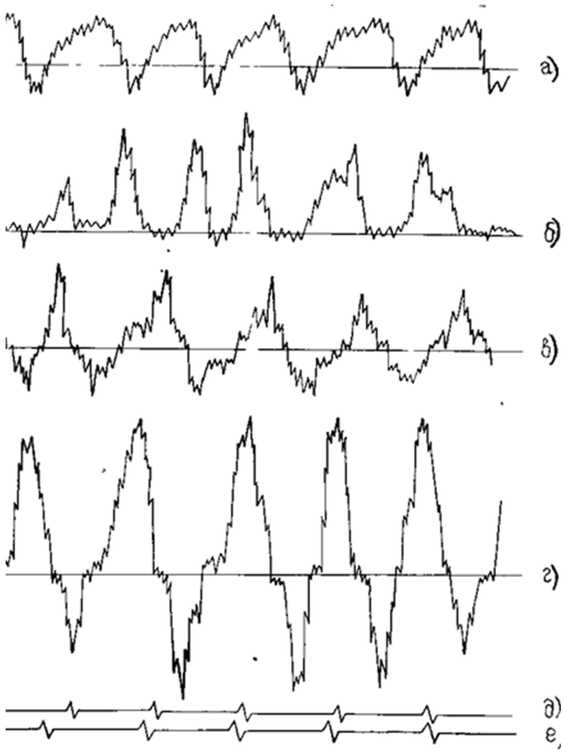

Рисунок 1. Осциллограммы моментов и усилий в приводе колеблющегося лемеха корнеклубнеуборочной машины

Рассмотрим уравнение (1) в момент $(t+\tau)$,

$$J\ddot{\varphi}(t+\tau)+h\dot{\varphi}(t+\tau)+f\left(\varphi(t+\tau)\right)=x(t+\tau), \qquad (3)$$

Умножим уравнение (3) на $\varphi_0^*(t)$ (индекс * обозначает комплексно-сопряженную величину) и выполним операцию взятия математического ожидания.

$$J\,M\left\{\varphi_0^*(t)\,\ddot{\varphi}(t+\tau)\right\}+hM\left\{\varphi_0^*(t)\,\dot{\varphi}(t+\tau)\right\}+M\left\{\varphi_0^*(t)\,f\left(\varphi(t+\tau)\right)\right\}=M\left\{\varphi_0^*(t)\,x(t+\tau)\right\} \qquad (4)$$

Очевидно, слагаемыми этого уравнения являются корреляционные функции.

$R_{\varphi_0 x}(\tau)=M\left\{\varphi_0^*(t)\,x(t+\tau)\right\}$ - взаимная корреляционная функция процессов $\varphi_0(t)$ и $x(t)$.

Взаимная корреляционная функция процесса $\varphi_0(t)$ и его производной по времени $\dot{\varphi}_0(t)$ для стационарной функции

$$R_{\varphi_0\dot{\varphi}_0}(\tau)=M\left\{\varphi_0^*(t)\,\dot{\varphi}_0(t+\tau)\right\}=\frac{dK_{\varphi_0}(\tau)}{d\tau}.$$

Взаимная корреляционная функция процесса $\varphi_0(t)$ и его второй производной по времени $\ddot{\varphi}_0(t)$ для стационарной функции

$$R_{\varphi_0 \ddot{\varphi}_0}(\tau) = M\left\{\varphi_0^*(t)\,\ddot{\varphi}_0(t+\tau)\right\} = \frac{d^2 K_{\varphi_0}(\tau)}{d\tau^2} = -K_{\dot{\varphi}_0}(\tau).$$

Причем для стационарного процесса

$$R_{\varphi_0 \dot{\varphi}_0}(0) = M\left\{\varphi_0^*(t)\,\dot{\varphi}_0(t)\right\} = \frac{dK_{\varphi_0}(0)}{d\tau} = \frac{d\sigma_{\varphi_0}^2}{d\tau} = 0, \quad т.\,к.\ \sigma_{\varphi_0}^2 \equiv D_{\varphi_0} = const;$$

$$R_{\varphi_0 \ddot{\varphi}_0}(0) = M\left\{\varphi_0^*(t)\,\ddot{\varphi}_0(t)\right\} = \frac{d^2 K_{\varphi_0}(0)}{d\tau^2} = -K_{\dot{\varphi}_0}(0) = -M\left\{\dot{\varphi}_0^*(t)\,\dot{\varphi}_0(t)\right\} = -D_{\dot{\varphi}_0}, \ т.к.\ K_{\dot{\varphi}_0}(\tau) =$$

$$= -\frac{d^2 K_{\dot{\varphi}_0}(\tau)}{d\tau^2}$$

Вычислим моментные функции

$$M\left\{\varphi_0^*(t)\,\dot{\varphi}(t+\tau)\right\} = M\left\{\varphi_0^*(t)\,\dot{\varphi}_0(t+\tau)\left(a_1 + 3a_3\varphi_0{}^2(t+\tau) + 5a_5\varphi_0{}^4(t+\tau) + \ldots + na_n\varphi_0{}^{n-1}(t+\tau)\right)\right\} =$$

$$= M\left\{\varphi_0^*(t)\,\dot{\varphi}_0(t+\tau)\sum_{i=0,1,..}^{\frac{n-1}{2}}(2i+1)a_{2i+1}\varphi_0{}^{2i}(t+\tau)\right\}$$

Так как $\varphi_0(t)$ и $\dot{\varphi}_0(t)$ - нормальные процессы, воспользуемся соотношением для высших моментов через моменты второго порядка.

Учтем соотношения:

$M\left\{\varphi_0(t+\tau)\,\varphi_0(t+\tau)\right\} = D_{\varphi_0} = const$ - дисперсия стационарного процесса $\varphi_0(t)$;

$M\left\{\varphi_0^*(t)\,\varphi_0(t+\tau)\right\} = K_{\varphi_0}(\tau)$ - корреляционная функция стационарного процесса $\varphi_0(t)$;

$M\left\{\dot{\varphi}_0(t+\tau)\,\varphi_0(t+\tau)\right\} = 0$ - для вещественного стационарного процесса.

Тогда

$$M\left\{\varphi_0^*(t)\,\dot{\varphi}(t+\tau)\right\} = \frac{dK_{\varphi_0}(\tau)}{d\tau}\sum_{i=0,1,2,\ldots}^{\frac{n-1}{2}} a_{2i+1}\,1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2i+1)\,D_{\varphi_0}^i \tag{5}$$

Моментные функции принимают вид:

$$M\left\{\varphi_0^*(t)\,\ddot{\varphi}(t+\tau)\right\} = M\left\{\varphi_0^*(t)\,\ddot{\varphi}_0(t+\tau)\left(a_1 + 3a_3\varphi_0{}^2(t+\tau) + 5a_5\varphi_0{}^4(t+\tau) + \ldots + na_n\varphi_0{}^{n-1}(t+\tau)\right)\right\} +$$

$$+ M\left\{\varphi_0^*(t)\,\dot{\varphi}_0^2(t+\tau)\left(6a_3\varphi_0(t+\tau) + 20a_5\varphi_0{}^3(t+\tau) + \ldots + n(n-1)a_n\varphi_0{}^{n-2}(t+\tau)\right)\right\} =$$

$$= M\left\{\varphi_0^*(t)\,\ddot{\varphi}_0(t+\tau)\sum_{i=0,1,..}^{\frac{n-1}{2}}(2i+1)a_{2i+1}\varphi_0{}^{2i}(t+\tau)\right\} +$$

$$+ M\left\{\varphi_0^*(t)\,\dot{\varphi}_0{}^2(t+\tau)\sum_{i=1,2,..}^{\frac{n-1}{2}}(2i+1)(2i)a_{2i+1}\varphi_0{}^{2i-1}(t+\tau)\right\}$$

$M\left\{\varphi_0(t+\tau)\,\ddot{\varphi}_0(t+\tau)\right\} = -M\left\{\dot{\varphi}_0(t+\tau)\,\dot{\varphi}_0(t+\tau)\right\} = -D_{\dot{\varphi}_0} = \dfrac{d^2 K_{\varphi_0}(0)}{d\tau^2} = \dfrac{d^2 D_{\varphi_0}}{d\tau^2} = 0$ - для вещественного стационарного процесса.

Тогда

$$M\left\{\varphi_0^*(t)\,\ddot{\varphi}(t+\tau)\right\} = \frac{d^2 K_{\varphi_0}(\tau)}{d\tau^2}\sum_{i=0,1,2,\ldots}^{\frac{n-1}{2}} a_{2i+1}\,1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2i+1)\,D_{\varphi_0}^i \tag{6}$$

Момент, содержащий нелинейную функцию $f(\varphi(t))$, можно вычислить при помощи двумерной плотности $p(\varphi_0, \varphi_0^*)$:

$$M\{\varphi_0^*(t)\ f(\varphi(\varphi_0(t+\tau)))\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0^*(t) f(\varphi_0(t+\tau))\, p(\varphi_0^*(t), \varphi_0(t+\tau))\, d\varphi_0^*\, d\varphi_0 \ .$$

Переменная $\cdot\varphi_0$ входит в подынтегральное выражение явно, что позволяет вычислить интеграл.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0^*(t)\ p(\varphi_0^*(t), \varphi_0(t+\tau))\, d\varphi_0^* = \frac{K_{\varphi_0}(\tau)}{\sqrt{2\pi D_{\varphi_0}}} \frac{\varphi_0}{D_{\varphi_0}} exp\left(-\frac{\varphi_0^2}{2D_{\varphi_0}}\right)$$

Тогда $M\{\varphi_0^*(t)\ f(\varphi(\varphi_0(t+\tau)))\} = \dfrac{K_{\varphi_0}(\tau)}{\sqrt{2\pi}\ \sigma_{\varphi_0}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$, *где* $x = \dfrac{\varphi_0}{\sigma_{\varphi_0}}$. (7)

В итоге моментное соотношение принимает вид линейного дифференциального уравнения относительно $K_{\varphi_0}(\tau)$

$$J\frac{d^2K_{\varphi_0}(\tau)}{d\tau^2} + h\frac{dK_{\varphi_0}(\tau)}{d\tau} + \omega_*^2 K_{\varphi_0} = \gamma R_{\varphi_0 x}(\tau), \tag{8}$$

где $\omega_*^2 = \dfrac{\gamma}{\sqrt{2\pi D_{\varphi_0}}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$, $\quad \gamma = \left(\displaystyle\sum_{i=0,1,2,\ldots}^{\frac{n-1}{2}} a_{2i+1}\, 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2i+1)\, D_{\varphi_0}^i\right)^{-1}$.

Рассмотрим уравнение (1) в момент $(t-\tau)$,

$$J\ddot{\varphi}(t-\tau) + h\dot{\varphi}(t-\tau) + f(\varphi(t-\tau)) = x(t-\tau), \tag{9}$$

Выполним с уравнением (9) преобразования аналогичные (3,4):

$$J\,x^*(t)\ddot{\varphi}(t-\tau) + h\,x^*(t)\dot{\varphi}(t-\tau) + x^*(t) f(\varphi(t-\tau)) = x^*(t) x(t-\tau),$$

Меняя порядок дифференцирования и нахождения математического ожидания, получим, учитывая преобразования моментных функций (5) и (6):

$$J\frac{d^2R_{\varphi_0 x}(\tau)}{d\tau^2} - h\frac{dR_{\varphi_0 x}(\tau)}{d\tau} + \omega_*^2 R_{x\varphi_0}(\tau) = \gamma K_x(\tau). \tag{10}$$

Здесь учтено совместное нормальное распределение

$$p(\varphi_0, x^*) = \frac{1}{2\pi\sigma_0\sigma_x\sqrt{1-r_1^2}}\ exp\left[-\frac{1}{2(1-r_1^2)}\left(\frac{\varphi_0^2}{\sigma_{\varphi_0}^2} - \frac{2r_1\varphi_0 x^*}{\sigma_{\varphi_0}\sigma_x} + \frac{x^{*2}}{\sigma_x^2}\right)\right],$$

где $\varphi_0 = \varphi_0(t)$, $\quad x^* = x^*(t+\tau)$, $\quad r_1 = \dfrac{R_{\varphi_0 x}(\tau)}{\sigma_0\sigma_x} = \dfrac{M\{\varphi_0(t)x^*(t+\tau)\}}{D_{\varphi_0}}$ - коэффициент корреляции.

Момент, содержащий нелинейную функцию $f(\varphi(t))$, можно вычислить при помощи двумерной плотности $p(x^*, \varphi_0)$:

$$M\{x^*(t)\ f(\varphi(\varphi_0(t-\tau)))\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) f(\varphi_0(t-\tau))\, p(x^*(t), \varphi_0(t-\tau))\, dx^*\, d\varphi_0 \ .$$

Переменная $x^*(t)$входит в подынтегральное выражение явно, что позволяет вычислить интеграл.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\ p\left(x^*(t), \varphi_0(t-\tau)\right) dx^* \ = \frac{R_{x\varphi_0}(\tau)}{\sqrt{2\pi D_{\varphi_0}}} \frac{\varphi_0}{D_{\varphi_0}} exp\left(-\frac{\varphi_0^2}{2 D_{\varphi_0}}\right)$$

Исключая взаимную корреляционную функцию $R_{\varphi_0 x}$ из уравнений (8) и (10) получим уравнение относительно корреляционной функции K_{φ_0}

$$\left(J\frac{d^2}{d\tau^2} - h\frac{d}{d\tau} + \omega_*^2\right)\left(J\frac{d^2}{d\tau^2} + h\frac{d}{d\tau} + \omega_*^2\right) K_{\varphi_0}(\tau) = \gamma^2 K_x(\tau) \tag{11}$$

где $\omega_*^2 = \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi D_{\varphi_0}}} \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx\,,\qquad \gamma = \left(\sum_{i=0,1,2,\dots}^{\frac{n-1}{2}} a_{2i+1}\, 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2i+1)\, D_{\varphi_0}^i\right)^{-1}.$

Воспользуемся связью между корреляционной функцией и спектральной плотностью:

$$K_{\varphi_0}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\varphi_0}(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega,\quad K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega,$$

$$\left(J\frac{d^2}{d\tau^2} - h\frac{d}{d\tau} + \omega_*^2\right)\left(J\frac{d^2}{d\tau^2} + h\frac{d}{d\tau} + \omega_*^2\right)\int_{-\infty}^{\infty} S_{\varphi_0}(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega = \gamma^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega\,.$$

Следовательно

$$\left(J(i\omega)^2 - h\,(i\omega) + \omega_*^2\right)\left(J(i\omega)^2 + h\,(i\omega) + \omega_*^2\right)\int_{-\infty}^{\infty} S_{\varphi_0}(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega = \gamma^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\, e^{i\omega\tau}\, d\omega\,.$$

Тогда соответствующее спектральное соотношение имеет вид:

$$S_{\varphi_0}(\omega) = \frac{\gamma^2 S_x(\omega)}{\left(J(i\omega)^2 - h\,(i\omega) + \omega_*^2\right)\left(J(i\omega)^2 + h\,(i\omega) + \omega_*^2\right)}\,. \tag{12}$$

Особенность уравнения (12) по сравнению с классическим линейным случаем заключается в том, что постоянные γ и ω_*^2 зависят от неизвестных параметров D_{φ_0}, a_i. Одно из уравнений относительно этих параметров выводится на основе (12):

$$D_{\varphi_0} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\varphi_0}(\omega)\ d\omega\ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma^2 S_x(\omega)}{|L(i\omega)|^2} d\omega, \tag{13}$$

где $L(i\omega)$.– импеданс $L(i\omega) = J(i\omega)^2 + h\,(i\omega) + \omega_*^2$.

После интегрирования приходим к алгебраическому уравнению относительно D_{φ_0}, и a_i. Остальные уравнения могут быть получены из вариационного принципа максимума энтропии [5].

Рассмотренный метод позволяет исследовать динамические процессы в приводных механизмах рабочих органов с колебательным движением, имеющих существенно нелинейные характеристики (люфты, обгонные муфты, нелинейные функции положения) и подверженных случайным входным воздействиям [6,7].

Список использованных источников

1. Крюков Б.И. Вынужденные колебания существенно нелинейных систем. М.: Машиностроение, 1984. – 283 с.
2. Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: Дрофа, 2004. – 560 с.
3. Макаров Б.П. Нелинейные задачи статистической динамики машин и приборов.- М: Машиностроение, 1999.- 262 с.
4. Прохоров С.А. Математическое описание и моделирование случайных процессов / Самар. гос. аэрокосм. ун-т, 2001. 209 с.
5. Вислоусова И.Н., Котов В.В., Михалев А.И. Исследование стационарных процессов нелинейных многомассовых систем методом спектральных представлений. - Инновационные

технологии в науке и образовании. ИТНО-2014: сборник научн. тр. научн.-метод. конф. (г.Ростов-на-Дону - п. Дивноморское, 4-7 сентября, 2014).- Ростов-на-Дону.- Зерноград: СКНИИМЭСХ.- 2014.- 469 с.

6. Большенко В.П., Вислоусова И.Н. Особенности поведения нелинейной динамической системы механизма подкапывания, обусловленные диссипацией // Труды VIII Международной научно-технической конференции по динамике технологических систем / ДГТУ. – Ростов н/Д, 2007. – Т III, С. 201-206.

7. Вислоусова И.Н., Лесняк О.Н. Моделирование динамики механизма очистки зерноуборочного комбайна с учетом нелинейности системы // Состояние и перспективы развития сельскохозяйственного машиностроения: Сборник статей 10 международной научно-практической конференции 1 – 3 марта 2017 г., г. Ростов-на-Дону. В рамках 20-й международной агропромышленной выставки «Интерагромаш-2017», Ростов н/Д, 2017. – С. 61-65.

Работа выполнена в рамках инициативной НИР.